Pontificia Universidad Católica deValparaíso
Instituto de Matemáticas
ALGEBRA LINEAL 3^a Prueba

MAT- 213

Ejercicio N^o 1 (20 puntos)

Construya una transformación lineal L de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}_2[x]$ tal que
Im(L)=$\left\langle x^2+3x,\ 2x+1\right\rangle$ y Ker(L) $=\langle(1,-2,3)\rangle$

Desarrollo

Consideremos $B=\{(1,-2,3),(1,0,0),(0,0,1)\}$base de $\mathbb{R}^3 y$ $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}_2[x]$ tal que

$$L(1,-2,3)=0x^2+0x+0$$

1. $L(1,0,0)=x^2+3x$

   $L(0,0,1)=2x+1$

Como $(a,b,c)=\dfrac{-b}{2}(1,-2,3)+\dfrac{2a+b}{2}(1,0,0)+\dfrac{2c+3b}{2}(0,0,1)$

Se tiene que $L(a,b,c)=\dfrac{-b}{2}L(1,-2,3)+\dfrac{2a+b}{2}L(1,0,0)+\dfrac{2c+3b}{2}L(0,0,1)$

Esto es $L(a,b,c)=\dfrac{-b}{2}\left(0x^2+0x+0\right)+\left(\dfrac{2a+b}{2}\right)\left(x^2+3x\right)+\dfrac{2c+3b}{2}(2x+1)$

$$\boxed{L(a,b,c)=\left(a+\frac{b}{2}\right)x^2+\left(3a+\frac{9}{2}b+2c\right)x+c+\frac{3}{2}b}$$

Siendo $Ker(L)=\ \langle(1,-2,3)\rangle$ & Im(L)=$\left\langle x^2+3x,\ 2x+1\right\rangle$

Notar que:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La transformación lineal dada es un ejemplo de las que verifican}\\ Ker(L)=\ \langle(1,-2,3)\rangle\ \&\ Im(L)=\left\langle x^2+3x,\ 2x+1\right\rangle\end{array}}$$

.

Ejercicio N^o 2 (40 puntos)

Considere el endomorfismo T de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ donde } B = \{(1,1,2),(1,1,0),(1,0,2)\}$$

Determine

2.1 $T(x,y,z)\,,\ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

Desarrollo

$[T]_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow T(1,1,2) = 2(1,1,2)\,; T(1,1,0) = (1,1,2) + 2(1,1,0)\,; T(1,0,2) = (1,0,2)$

$$\boxed{\text{T}(1,1,2)\text{=}(2,2,4);\text{T}(1,1,0)\text{=}(3,3,2);\text{T}(1,0,2)\text{=}(1,0,2)}$$

1. Dado que $(x,y,z) = \left(-x+y+\frac{z}{2}\right)(1,1,2) + \left(x-\frac{z}{2}\right)(1,1,0) + (x-y)(1,0,2)$

   se tiene que $T(x,y,z) = \left(-x+y+\frac{z}{2}\right)(2,2,4) + \left(x-\frac{z}{2}\right)(3,3,2) + (x-y)(1,0,2)$

$$\boxed{\text{T}(x,y,z)\text{=}\left(2x+y-\frac{1}{2}z, x+2y-\frac{1}{2}z, 2y+z\right)}$$

2.2 Indique por qué T es un isomorfismo

Desarrollo T es un isomorfismo pues $\text{rg}([T]_B) = 3 = \dim \text{Im}(T)$ (T es epiyectiva) $\wedge \dim Ker(T) = 0$ (T es inyectiva)

2.3 Calcule $T^{-1}(5,5,8)$

Desarrollo

Notar que $(5,5,8) = \frac{7}{4}(2,2,4) + \frac{1}{2}(3,3,2) + 0\,(1,0,2)$

Así $T^{-1}(5,5,8) = \frac{7}{4}(1,1,2) + \frac{1}{2}(1,1,0) = \left(\frac{9}{4}, \frac{9}{4}, \frac{7}{2}\right)$

2.4 ¿Cuáles son los subespacios propios de esta transformación lineal?

Desarrollo Los subespacios invariantes de T son

$$\boxed{\text{V}_2\text{=}\langle(1,1,2)\rangle;\text{V}_1\text{=}\langle(1,0,2)\rangle}$$